8. Tutorium

Montag, 6. Juni 2022 18:57

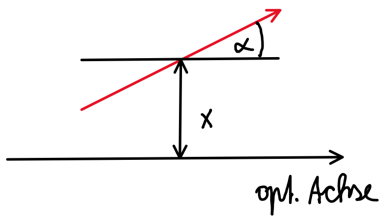
Gaußsche Optik

- wir wollen nun das Verhalten optischer Systeme im Sinne der Strahlenoptik beschreiben (ohne Beugungsphänomene)

⇒ Das Feld wird durch unendlich dünne Strahlen repräsentiert
Jeder Strahl besitzt:
↳ Amplitude u_i mit $P_i = |u_i|^2$
↳ Ausbreitungsrichtung $\vec{k}_i$
↳ Polarisation $\vec{j}_i$

Matrizenoptik

- wir betrachten im Folgenden nur rotationssymmetrische Probleme
  ↳ Symmetrieachse: optische Achse



- weiterhin Paraxiale Näherung
  ↳ kleiner Winkel zur optischen Achse

- Wir beschreiben einen Strahl nun durch einen Zweiervektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} x \\ n\alpha \end{pmatrix}$ meist $n = 1$
  ⇒ Brechungsgesetz: $n_1 \alpha_1 = n_2 \alpha_2$ da $\sin\alpha \approx \alpha$

- Beschreibung des Durchgangs durch ein optisches Element durch eine Matrix

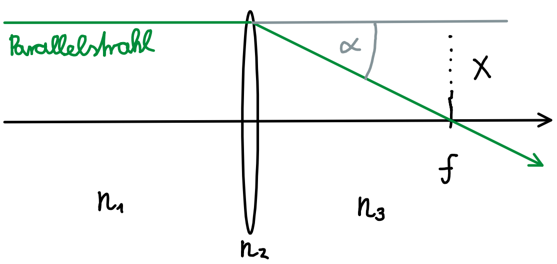
$$\hat{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + B\alpha \\ Cx + D\alpha \end{pmatrix}$$ ABCD-Matrix Formalismus

1.) Freiraum der Länge L: Änderung des Abstandes $x = x_0 + \tan\alpha_0 L \approx x_0 + \alpha_0 L$
$\alpha = \alpha_0$

$$\Rightarrow \hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.) Linse mit Brennweite f: keine Änderung der Position $x = x_0$

Änderung des Winkels:



$\alpha = -\frac{x}{f}$

$$\Rightarrow \hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 0 \end{pmatrix}$$

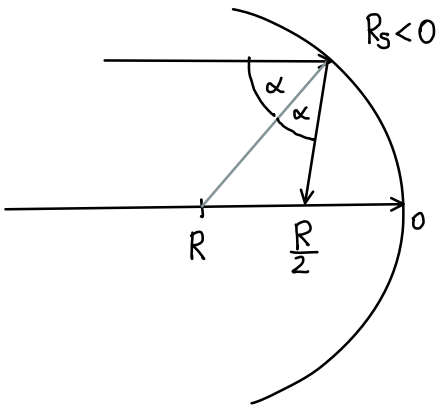
wobei f nach der Vorlesung gegeben war als $f = \frac{n_3}{k_{12} + k_{23}}$ mit $k_{ij} = \frac{n_j - n_i}{R}$

↳ Unter der Annahme: $n_1 = n_3 = 1$, $n_2 = n$ ergibt sich

$$\frac{1}{f} = k_{12} + k_{23} = \frac{n-1}{R_1} + \frac{1-n}{R_2} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

⇒ Das ist die sogenannte Linsenschleiferformel (für dünne Linsen)

3.) Hohlspiegel mit Krümmungsradius R



- konkaver Spiegel: $R < 0$
- konvexer Spiegel: $R > 0$

→ Ein Spiegel wirkt wie eine Linse mit Brennweite $f = \underbrace{-\frac{R}{2}}_{>0}$

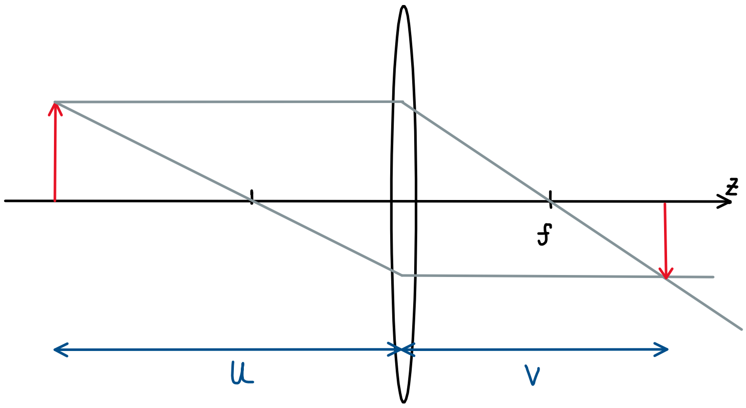
$$\Rightarrow \quad \hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 0 \end{pmatrix}$$

Abbildung durch eine dünne Linse

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplikation von rechts nach links

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{V}{f} & u + V - \frac{uV}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{u}{f} \end{pmatrix}$$



Der Fokuspunkt darf nicht vom Eingangs-winkel abhängen $x_{out} \neq f(\alpha_{in})$, da das gesamte Licht fokussiert wird

mit $x_{out} = A x_{in} + B \alpha_{in}$ erhalten wir $B = 0$ ⇒ $\boxed{\frac{1}{u} + \frac{1}{V} = \frac{1}{f}}$

$\Downarrow$

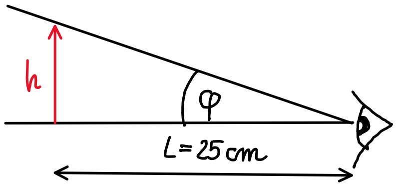
weiterhin ist die Vergrößerung $\frac{x_{out}}{x_{in}} = A = 1 - \frac{V}{f} = \frac{f}{f-u}$

$$V = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{u}\right)^{-1} = \frac{fu}{u-f}$$

für $u > f$ ist $A < 0$
$u < f$ ist $A > 0$

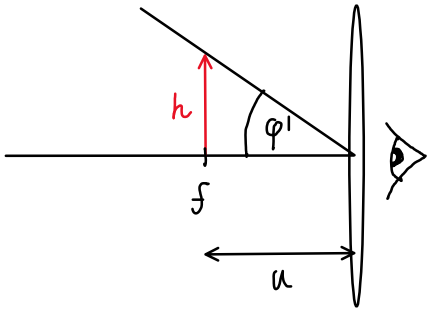
für $A < 0$ entsteht kein reelles Bild auf der anderen Seite der Linse
↳ allerdings entsteht ein virtuelles Bild auf der Objektseite
↳ Prinzip einer Lupe

Wie funktioniert denn überhaupt eine Lupe?



Problem: unsere Augen können Objekte die sehr nah dran sind $L < 25\,cm$ (deutliche Sehweite) nicht ohne Anstrengung längere Zeit akkomodieren

die scheinbare Größe eines Objektes ist bestimmt durch den Sehwinkel φ



- bei Verwendung einer Lupe lässt sich das Objekt auch bei geringerer Entfernung entspannt anschauen
- für $u = f$ entsteht das Bild im Unendlichen $v \to \infty$

$\Rightarrow$ Entspannung des Auges Akkomodation auf unendlich

Vergrößerung der Lupe: $\boxed{m = \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{25\,cm}{f}}$

$$\tan\varphi = \frac{h}{25\,cm} \approx \varphi$$

$$\tan\varphi' = \frac{h}{f} \approx \varphi'$$

- wollen wir stattdessen auf $v = -25\,cm$ akkomodieren so ergibt sich $m = 1 + \frac{25\,cm}{f}$

$$m = \frac{25\,cm}{u} = 25\,cm\,\frac{v-f}{\underset{\uparrow\,-25\,cm}{v}f} = \frac{f-v}{f} = 1 + \frac{25\,cm}{f}$$

$\Rightarrow$ Fazit: Es geht weniger um die Vergrößerung an sich, als das Objekt entspannt aus größerer Nähe betrachten zu können!

Hauptebenen:

- wir wollen nun ein kompliziertes Linsensystem (bspw. ein Objektiv) durch eine effektive dünne Linse ersetzen

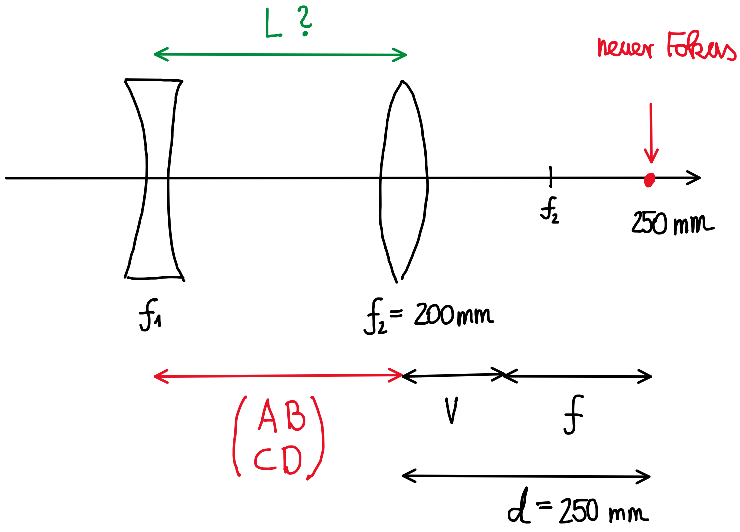
$\to$ Freiraum einfügen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{A+vC}^{=1} & \overbrace{Au + B + uvC + vD}^{\overset{!}{=}0} \\ C & \underbrace{Cu + D}_{=1} \end{pmatrix}$$

Die Hauptebenen liegen dann bei:

$$\boxed{v = \frac{1-A}{C} \qquad u = \frac{1-D}{C}}$$

Beispiel: Wie kann man die Brennweite einer Linse durch das Hinzufügen einer zweiten vergrößern?



$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{L}{f_1} & L \\ -\frac{f_1 + f_2 - L}{f_1 f_2} & 1 - \frac{L}{f_2} \end{pmatrix}$$

Wir fordern nun, dass die Summe der Brennweite und der hinteren Hauptebenenposition die gewünschte Brennweite d ergeben

$$d = V + f = \frac{1-A}{C} - \frac{1}{C} = -\frac{A}{C} = \left(1 - \frac{L}{f_1}\right) \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - L}$$

$\Rightarrow$ Auflösen nach L: $\quad d(f_1 + f_2 - L) = \left(1 - \frac{L}{f_1}\right) f_1 f_2$

Werte einsetzen

$$d(f_1 + f_2) - f_1 f_2 = L(d + f_2) \qquad \Rightarrow L = \frac{d(f_1 + f_2) - f_1 f_2}{d + f_2} \overset{\downarrow}{=} 1000\text{mm} + f_1$$

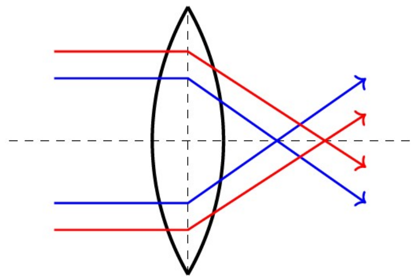
Abbildungsfehler:

1.) Chromatische Aberration:

↳ nach der Linsenschleiferformel hängt f von der Brechzahl ab

$f \sim \frac{1}{n-1} \quad \Rightarrow f(\text{blau}) < f(\text{rot})$

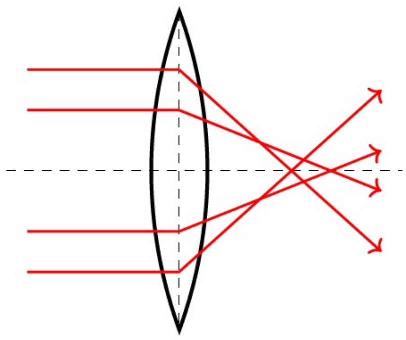
↳ Lösung: · Verwendung von Spiegeln
· Ausgleich durch optische Gitter



2.) Sphärische Aberration:

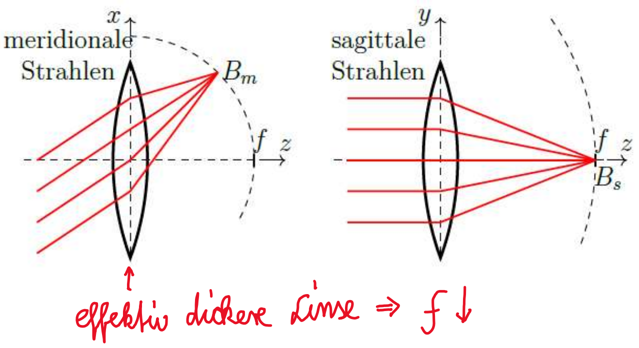
↳ die Brennweite variiert mit dem Abstand zur optischen Achse

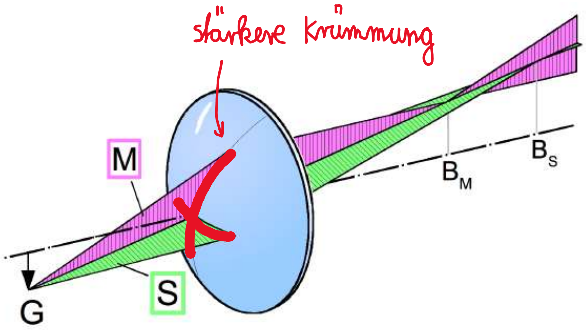
↳ Lösung: Verwendung von Asphären



3.) Astigmatismus:

- verschiedene Brennweiten für meridionale und sagittale Strahlen





Meriodionale Strahlen: Liegen in der Ebene aus Mittelpunktstrahl und optischer Achse!